SULLA INUTILITÀ DELLA QUESTIONE INTORNO ALLA MISURA DELLE FORZE VIVE PER LA RISOLUZIONE DE' PROBLEMI DINAMICI E SULLA IMPOSSIBILITÀ DI DEFINIRE QUESTA DISPUTA PER MEZZO DI ALCUNO ESPERIMENTO

MEMORIA

DELL' AB.
ANGELO ZENDRINI
SOCIO P. DELL'ACCAD. I. R. DI SC. LET. ED AR. DI PADOVA.

unus utrique
Error, sed variis illudit partibus
Hor. l. 2. Sat. 3.

IN VENEZIA
1804.
PRESSO ANTONIO ROSA,
con permissione.

AL CHIARISSIMO SIGNOR

ANTONIO CAGNOLI

PRESIDENTE DELLA SOCIETÀ ITALIANA E PROFESSORE DI MATEMATICHE SUBLIMI NEL COLLEGIO MILITARE DI MODENA.

CHIARISSIMO SIGNORE

Se varie combinazioni interruppero la corrispondenza epistolare, che di quando in quando mi procacciavo l'onore di tenere con lei, non tacquero però mai nel mio animo i sentimenti di ammirazione e rispetto dovuti alla eminente dottrina sua, ed alle sue distinte qualità sociali. Io mi auguravo da molto tempo una occasione favorevole per potermi a lei ricordare, e la pubblicazione del presente mio scritto parvemi a ciò non disadatta. Gli eccitamenti ch'ella mi diede fin da quan-

do ne tracciai il primo abbozzo, e che le comunicai le mie prime idee su questo argomento, mi fecero giudicare che di non lieve interesse fosse la materia, che avevo preso a mettere nel suo più vero lume, e quindi mi animano adesso ad indirizzare a lei questo lavoro, che all' incoraggiamento suo deve in gran parte quella qualunque miglior forma, alla quale mi sono studiato di ridurlo. So di non poter aspirare con esso al merito di avere arricchita la Scienza Mecca-

nica di peregrini ritrovati; ma sò altresì che delle Scienze si rendono benemeriti non solo coloro che ne avanzano i limiti, ma quelli pure che levano gli ostacoli, i quali si frappongono ai di loro avanzamenti, e che ai cultori di esse ritardar possono i progressi. Sarò assai soddisfatto se ella giudicherà che io possa non demeritarmi un luogo tra questi. Comunque però sia, la prego di volermi costantemente annoverare tra i più zelanti ed affettuosi di lei ammiratori, e di ac-

cogliere con bontà questo tenue tributo dell' alta considerazione, e del rispettoso attaccamento col quale ho l' onore di protestarmi

DI LEI CHIARISSIMO SIGNORE

Mestre 16 *Marzo* 1804.

Umil.mo Dev.mo Servitore
ANGELO ZENDRINI.

La questione intorno alla misura delle forze vive, suscitata dal Leibnizio, ed agitata per una età circa da' più grandi Matematici di Europa, dopo le brevi ma dimostrative riflessioni dell' Alembert cessò alla metà del corrente secolo di essere dominatrice della Scienza Meccanica. Quindi i maggiori fisici Matematici rilegarono questa disputa dalle meccaniche ricerche o espressamente, dichiarandola inutile, o tacitamente, ommettendola senza prendervi partito.

Non piccolo servigio si rese con ciò ai cultori delle Fisico-Matematiche. Questi oltre al risparmio del tempo, che occuperebbero in una disputa estranea alle ricerche meccaniche, hanno il vantaggio altresì di non trovar il limitare di una scienza fondata sulla evidenza geometrica incespato da una questione, che volendosi legata colla Meccanica, potea parer di renderne incerti i fondamenti.

Di questo parere furono i maggiori matematici dalla metà dello scaduto secolo in poi; nè dopo il ragionamento dell'Alembert, con cui dimostra la inutilità di questa disputa rapporto alla Meccanica, nessuno vi fu di chiaro nome che assumesse di impugnare la di lui sentenza. Imperciocchè avendo egli mostrato che delle due opposte sentenze essendo base due leggi, quantunque diverse, ugualmente vere, quale poi di queste due assumere si dovesse per misura delle forze de' corpi in moto, era una ricerca inutile affatto alla Meccanica, la quale non si occupa che della verità delle leggi del moto, e dei risultati che ottengonsi da queste.

Vere pertanto essendo ugualmente ambedue le leggi che servono di fondamento alla disputa, i risultati che da queste si ottengono devono essere veri ugualmente, e quindi, come dice l' Alembert, se si proporrà il medesimo problema di Meccanica da risolvere a due Geometri uno avversario, l'altro partigiano delle forze vive, le loro soluzioni, purchè giuste, saranno sempre perfettamente d'accordo. Ridotta adunque la questione al suo legittimo valore, la soluzione di essa riesce inutile affatto ai progressi della scienza meccanica, rimanendo ad ogni fisico l'arbitrio di dichiararsi più per l'una che per l'altra sentenza, senza pericolo di cader in errore nella soluzione de' problemi meccanici.

Infatti il celebre Vincenzo Riccati, alla di cui grande dottrina non potea sfuggire questa verità, non dissimulò trascendere questa disputa i limiti della Fisica entrando essa ne' confini della metafisica. Volle però anco in questa saggiar le sue forze; e se la rinomata sua opera (*Dialogo di Vincenzo Riccati dove ne' congressi di più giornate delle Forze Vive, e delle azioni delle Forze morte si tien discorso*) per l'oggetto di definir la questione può non parere utilissima, nulladimeno tanto vi profuse del suo profondo sapere, che per molti altri riguardi può considerarsi come di gran giovamento pegli studiosi delle scienze matematiche.

Ma, dirà taluno, è poi ben certo che debba essere affatto indifferente alle ricerche meccaniche assumere l'una o l'altra misura delle forze vive? E non dee dirsi piuttosto che nella soluzione de' problemi, ne' quali si cerchi l'effetto prodotto da una forza, questo cambierà misura secondo che la ragione della forza si vorrà essere o Cartesiana o Leibniziana, e si avranno quindi due soluzioni dello stesso problema affatto diverse? Questa è appunto la conseguenza che deducesi dalla opera intitolata: *Nuovi sperimenti sopra l'effetto della caduta de' Gravi nelle materie cedevoli, co' quali si mostra la VERA MISURA DELLE FORZE VIVE, e si scuopre l'ERRORE che tuttora ignoto si contiene nella celebre esperienza del Poleni*. Dissertazione del Sig. Ab. Zuliani P. P. P. di Fisica nell'Università di Padova.

Da questi suoi nuovi sperimenti, diretti a verificare il troppo celebre sperimento del peraltro giustamente celebre Poleni, gli risulta che le forze fatte in materie cedevoli da gravi cadenti da altezze in ragion reciproca delle loro masse non sono eguali, ma il corpo di massa maggiore fa anche fossa maggiore. Quindi siccome il Poleni dal suo sperimento avea dedotto che le forze vive de' gravi cadenti sono come il prodotto delle masse nelle altezze da essi percorse, ossia ne' quadrati delle velocità; così da' suoi nuovi sperimenti crede il Signor Ab. Zuliani di poter conchiudere, che „ dalle sue sperienze risulta „ che le forze de' corpi cadenti sono in natura come „ le radici delle altezze che scorrono liberamente ca„ dendo. " Ecco pertanto come giudicando l' A. de' *Nuovi sperimenti* di aver ottenuto un effetto diverso da quello che ottenne il Poleni, pensò di poter anco conchiudere una diversa misura della forza, e conseguentemente diversa dover essere la soluzione di un problema, in cui si cerchi la misura di un effetto prodotto da una forza in moto secondo che Cartesiano o Leibniziano sia il calcolatore.

Se così fosse, egli è indubitabile che la soluzione della disputa della misura delle forze vive sarebbe quanto vi ha di più interessante nella Meccanica. Imperciocchè avverrebbe che dal dichiararsi per Leibniziano o Cartesiano dipenderebbe cogliere nella verità od inciampare in errori, dando giuste o false soluzioni ai problemi proposti.

Mosso da puro amor della verità e zelo degli studj Matematici ho creduto che sarebbe prestar non inutile servigio agli studiosi della Meccanica il diradar le ombre, e togliere i dubbj, che dalla laboriosa opera enunciata potessero essere insorti sulla importanza della questione delle forze vive. Imperciocchè troppo torto farebbe alle scienze esatte, che da una questione non ancor definita, le verità nelle soluzioni de' problemi geometricamente dimostrate dipender dovessero. Sarà pertanto oggetto di questo scritto mettere nel più chiaro lume possibile la inutilità di questa disputa per l'oggetto delle ricerche meccaniche, e dimostrar quindi la impossibilità di risolverla per mezzo di qualsivoglia sperimento.

Il moto e le proprietà generali di esso sono l'oggetto della meccanica. Ora nei corpi in moto le cose che ci appariscono, e che considerar possiamo sono il corpo che si muove ossia la sua massa, lo spazio che percorre, il tempo che impiega a percorrerlo, ed il rapporto che passa fra quello spazio e quel tempo, rapporto che noi chiamiamo velocità. Inoltre non potendo un corpo ch'è in quiete venir mosso che da una causa, questa qualunque si sia chiamasi potenza o forza motrice, il di cui effetto, in un mezzo che sensibilmente non resista, è di far percorrere al corpo mosso un certo spazio in un certo tempo; e in un mezzo poi resistente, l'effetto è di far sormontare o vincere una parte degli ostacoli che incontra.

Generalmente parlando questo moto prodotto nel corpo si può considerare o come uniforme, ed è quando un corpo si muove in guisa che uguali spazzj nel medesimo intervallo di tempo percorre; o come variato, allora cioè quando ad ogni istante gli succedono nuovi aumenti o decrementi di velocità, i quali se sieno proporzionali ai tempi chiamasi questo moto uniformemente variato.

Le proprietà di queste due spezie di moto, alle quali due spezie ogni qualunque immaginabile movimento di un corpo ridur si può, sono dimostrate matematicamente, e dedotte in particolare dall'Alembert nella sua celebre Dinamica da principj di ragionamento in modo che le leggi della statica e della Meccanica, quali si hanno dalla sperienza, sono del tutto conformi a quelle che si dedurrebbero nella sola ipotesi della esistenza della materia. Sono state dedotte pertanto dalle formule Galileane mediante il calcolo infinitesimale per ogni qualunque moto variato le due celebratissime formule ugualmente ammesse

da tutti $S.pds = \pm \frac{mu^2}{2} + Cte.$, e $S.pdt = \pm mu + Cte.$:

ch'è quanto dire che la sommatoria del prodotto della forza nell'elemento dello spazio è proporzionale alla massa nel quadrato della velocità, e che la sommatoria del prodotto della forza nell'elemento del tempo è proporzionale alla massa nella semplice velocità.

Ecco pertanto come la misura di questa forza viene rappresentata da una diversa proporzionalità secondo che il rapporto colla velocità si deduce dal prodotto di essa per il tempo, o per lo spazio. Ma questa forza qual proporzione ha poi colla velocità in sestessa; ossia delle due ragioni esposte, da quale veramente dedur si dovrà la originale misura della forza? A ciò si riduce in ultimi termini la questione delle forze vive, nella quale si ricerca, se la loro vera misura sia racchiusa nella formula $pdt = \pm mdu$, ovvero nell' altra $pds = \pm mudu$. Se nella prima resta vittoriosa la sentenza Cartesiana, se nella seconda la Leibniziana. Esaminiamo adesso la importanza di questa ricerca per la Dinamica.

L' effetto di una forza acceleratrice o ritardatrice è quello di accrescere o scemare la velocità di un corpo. Ora essendo la velocità il rapporto che passa fra un dato spazio, e un dato tempo, il rapporto tra la forza e la velocità non potrà aversi che o considerando nel moto accelerato il tempo impiegato dalla forza per dare al corpo una data velocità, siccome nel ritardato considerando il tempo che la forza ritardatrice, che può assumere il nome di resistenza, impiegò a distruggere una data velocità in un corpo; ovvero il rapporto tra la forza e la velocità si potrà ottenere considerando lo spazio che la forza ha fatto percorrere al corpo per fargli acquistare quella medesima data velocità nel caso del moto accelerato, siccome nel ritardato considerando lo spazio che il corpo ha potuto percorrere inanzi che la forza ritardatrice abbia potuto in esso distruggere la velocità che aveva. In ambedue i casi il rapporto della forza colla velocità dovrà essere espresso da un prodotto o della forza nel tempo, o della forza nello spazio. Non essendovi pertanto in natura mezzo per cui questo rapporto si possa ottenere altrimenti, non può per conseguenza esservi nemmeno problema meccanico, nel quale il rapporto della forza colla velocità si possa ricercare altrimenti. Egli è perciò che le due esposte equazioni, nelle quali qualunque moto variato si considera per un infinitesimo di spazio o di tempo come uniformemente accelerato o ritardato, soddisfano appieno ai bisogni di qualunque ricerca dinamica.

Perchè potesse la indagine della misura delle forze vive essere di qualche giovamento, converrebbe che in natura vi fosse un qualche caso, nel quale il moto di un corpo, e quindi il rapporto della forza movente colla velocità si potesse palesare altrimenti che o per lo spazio, o per il tempo; ma questo non può, come abbiam veduto, succedere per la natura medesima del moto da noi conosciuta, perciò la ricerca predetta alla soluzione di qualunque problema è totalmente superflua. Imperciocchè quando pure potessimo essere arrivati a dimostrare che una delle due predette proporzionalità è la vera misura delle forze vive, cosa avrebbesi con ciò ottenuto? Poniamo dimostrato che stia racchiusa nella formula $pdt = \pm mdu$: se l'effetto che noi vorremo calcolare venga rappresentato da uno spazio percorso con moto accelerato o ritardato, sarà egli men vero che $pds = \pm mudu$, e che quindi in questo caso la proporzionalità della sommatoria del prodotto della forza nell'elemento dello spazio è come la massa nel quadrato della velocità? Nè alcuna eccezione a quanto abbiamo detto apportar può il moto ritardato, nel quale l'effetto della forza si palesa dagli ostacoli vinti. Essendochè per ritrovare il rapporto della velocità del corpo in moto per mezzo delle resistenze da esso superate, converrà considerare o il numero delle resistenze che superar può, il qual numero di resistenze è sempre rappresentato dallo spazio da esse occupato, o converrà considerare la somma di esse che il corpo in moto è atto a vincere ad ogni istante. Per conseguenza il rapporto delle resistenze vinte alla velocità si averà o in un prodotto della resistenza (supposta comunque variata) nell' elemento dello spazio, o in un prodotto della resistenza nell' elemento del tempo. Se pertanto non vi è effetto in natura che sottometter si voglia al calcolo, il quale palesi il rapporto della forza alla velocità altrimenti che coi due prodotti nelle enunziate formule espressi per qualunque condizione della forza, ne verrà di legittima conseguenza che la speculazione della vera misura delle forze vive è assolutamente inutile alla soluzione de' problemi dinamici.

Non abbisognerebbe di più per dedurre legittimamente che non può esservi neppure sperimento alcuno che valga a decidere questa controversia, e che volendosi assumere qualche sperimento in prova dell'una o dell' altra sentenza si cade per necessità in petizion di principio. Siccome però ambi i partiti sembrarono fidar molto nella sperienza per darsi la causa vinta, così credo prezzo dell' opera rendere quanto più si può sensibile questo inganno.

Appoggiati ambedue i partiti al divulgato principio, che gli effetti devono essere proporzionali alla di loro causa (principio della di cui utilità quì non giova parlare); per rilevare la ragione che tengono colla velocità le forze de' corpi in moto, studiarono di consultare la esperienza, indagando cioè gli effetti che producono i corpi animati da gradi diversi di velocità. Siccome poi l' effetto sensibile della forza de'corpi in moto egli è di vincere o di resistere agli ostacoli che al di loro moto si oppongono, così si cercò quali ostacoli con diversi gradi di velocità i corpi potessero vincere. Delle tre sorta pertanto di ostacoli che si danno, non sono, com' è chiaro, opportuni alla ricerca se non se quelli, i quali distruggono il moto ne' corpi a poco a poco: essendocchè gli invincibili annientando ogni sorta di moto non sono atti a farci conoscere i differenti gradi di forza; e gli altri poi che hanno solo tanta resistenza quanta basta a distruggere il moto ne' corpi in un istante, riducendosi questi per comun consenso alle leggi dell' equilibrio, si conviene altresì da tutti che la loro forza è proporzionale alla massa nella semplice velocità.

Ciò posto non si può rilevare il rapporto della forza alla velocità per mezzo degli ostacoli, che questa forza distrugge, se non se considerando o la somma degli ostacoli che ad ogni istante è atta a vincere questa forza, o considerando il numero assoluto degli ostacoli che questa forza medesima può vincere. In ogni sperimento converrà ricorrere all'una o all'altra di queste considerazioni, e quindi in ogni sperimento si dovrà riconoscere questa forza capace di due effetti; uno che viene rappresentato dalla sommatoria del prodotto della forza nell' elemento del tempo, l' altro che lo è dalla sommatoria della forza nell' elemento dello spazio: due effetti de' quali negli sperimenti uno soltanto è avvertito dagli occhi volgari, mentre non lascia l' altro di esserlo da quelli del Matematico. Ora poichè è dimostrato, e da tutti ammesso che la sommatoria del prodotto della forza per l' elemento del tempo, ovvero trattandosi di moto ritardato, la somma delle resistenze che ad ogni istante può vincere un corpo in moto è proporzionale alla massa nella semplice velocità; e da altra parte la sommatoria della forza per l' elemento dello spazio, ossia considerandosi la forza ritardatrice il numero assoluto delle resistenze, che il medesimo corpo in moto può vincere, è proporzionale alla massa nel quadrato della velocità; ne viene che gridandosi vittoria da uno de' due partiti con un qualche sperimento, questo quantunque vero non valse mai a dimostrare il loro assunto. Non si fece che ripetere quanto è ammesso da tutti, e che nelle due citate formule si contiene, ma giammai si giunse a decidere in qual delle due sia racchiusa la cercata misura delle forze vive. Avviene quindi, come riflette il medesimo Riccati, che tutti gli sperimenti a favore di uno o dell' altro partito non sono nè altro esser possono che petizioni di principio, assumendosi per prova dell' oggetto in questione fatti, su' quali si fonda appunto la controversia medesima. Essendo adunque tanto dai Cartesiani quanto dai Leibniziani ammesse le due citate formule, mediante le quali soltanto il rapporto della forza colla velocità si può ottenere, ed essendo la misura delle forze vive fondata solamente nella ricerca a qual delle due formule competa la preminenza di original misura della forza, apparisce ciò che abbiamo proposto, essere inutile affatto la disputa della misura delle forze vive alla dinamica, ed alle soluzioni de' suoi problemi, le quali dovranno essere perfettamente uniformi qualunque de' due partiti piaccia d' abbracciare ad un Geometra.

Posti questi principj gioverà adesso passare all'esame degli *Sperimenti* del Sig. Ab. Z. rilevandone gli equivoci, che lo indussero a trar conseguenze sovvertenti le formule fondamentali della Dinamica dimostrate geometricamente.

„ Quando si prenda, (dice il Sig. Ab. Zuliani Opu-
„ sc. cit. p. 115,) la misura delle forze de' corpi
„ cadenti dalla grandezza delle fosse ch' essi fanno,
„ si

„ si deve dire che le forze che acquistano i corpi li-
„ beramente cadendo, sono come le radici delle al-
„ tezze dalle quali cadono, e però come le ve-
„ locità, e non come i quadrati delle stesse velo-
„ cità."

Prima di entrare in altre ricerche atte a dilucidar la serie de' suoi sperimenti, esaminiamo cosa necessariamente deducasi da questa sua conchiusione. Chiamisi adunque F la intiera fossa fatta dal cilindro cadente, M la massa di esso corpo, C la velocità che il corpo aveva al momento d' immergersi nella materia cedevole; sarà secondo il Sig. Ab. Z. $F = MC$. Rappresentandosi con F la intiera fossa, sia f una porzione qualunque di essa fossa innanzi che il corpo abbia consumata la intera sua velocità; e chiamisi parimenti f' la residua porzione di fossa, sicchè si abbia $F = f + f'$. Formata pertanto la porzione di fossa f, la velocità residua qualunque, la quale deve andar distrutta dalla rimanente porzione di fossa f', sia U. Essendo secondo l'Ab. Zuliani le fosse, che fanno i corpi nelle materie cedevoli, proporzionali alla massa nella semplice velocità, la fossa che farà il corpo di massa M colla velocità U, la quale per ipotesi abbiamo chiamata f', sarà espressa da MU, essendo lo stesso sia che il corpo cominci ad immergersi e ad escavar la fossa nella materia cedevole al punto dato, dove comincia la fossa f', colla velocità U, sia che arrivato al dato punto conservi la velocità U, la quale dallo escavarsi della fossa f' dovrà essere distrutta. Avremo dunque secondo l'Ab. Zuliani $f' = MU$. Ora sostituendo nella equazione $F = f + f'$ i valori di $F = MC$, e di $f' = MU$, si avrà $MC = f + MU$, ed $f = MC - MU$. Ciò posto per fossa, considerata questa come effetto prodotto da una forza, non si può intendere altro che le resistenze, le quali poterono essere vinte per tutta quella profondità: quindi chiamata r la resistenza, s la profondità della porzione qualunque di fossa f, per poter assumere una qualunque spezie di resistenza, sarà rappresentata la f dai simboli analitici $S.rds$; e quindi sostituendo si avrà $S.rds = MC - MU$. Questa equazione differenziata coi metodi comuni dà $rds = -MdU$: equazione come ognun vede falsa, perchè contraria all' altra sovraesposta, ch' è di verità matematica, $rds = -MUdU$. In siffatto assurdo convien che si cada qualora ammetter vogliasi la esposta conclusione dell' Autore de' *Nuovi Sperimenti*, ai quali poi se debbasi imputar quest' assurdo, o non piuttosto convenga attribuirsi ad un qualche equivoco non avvertito dall' Autore nel considerarli, lo vedremo qui appresso.

L' effetto nel produr il quale si esaurisce la forza, allorchè i corpi cadenti in materie cedevoli formano delle fosse, egli è quello di vincere le resistenze che oppone ad essi la materia ne' suoi strati, le quali resistenze successivamente vincendo penetra in essa fino alla totale estinzione della sua velocità. La misura pertanto dell' effetto prodotto dal corpo cadente non è già lo spazio che nella materia cedente ha percorso, ossia la profondità alla quale è giunto, se il corpo sia cilindrico, ma sibbene le resistenze che il corpo viaggiando per quello spazio ha potuto vincere. Un solo è il caso nel quale lo spazio percorso può assumersi come misura dell' effetto, ed è qualora la resistenza è costante; poichè in questo caso sì l' effetto ch' è rappresentato, come abbiam veduto, dalla sommatoria del prodotto della forza nell' elemento dello spazio, come altresì lo spazio stesso hanno la medesima proporzionalità, e si ha tanto $S.rds = \frac{MU^2}{2}$, e $S.rdS = \frac{Mu^2}{2}$, quanto facendo il confronto tra due fosse fatte dal medesimo corpo cilindrico in materia che ha la medesima resistenza costante $S:s = Mu^2 : MU^2$. Fuori di questo caso adunque s' ingannerebbe a partito chi prendesse la profondità delle fosse come misura dell'effetto, il quale in qualunque caso di resistenza comunque variabile, viene espresso da $S.rds$, e non già da $S.ds$. Avrebbe perciò gran torto chi istituendo degli sperimenti in materia di resistenza non costante, pretendesse trovare gli spazj, ossia (essendo le fosse fatte dal medesimo corpo cilindrico cadente da diverse altezze) le profondità come le masse nel quadrato della velocità rispettiva. Questa è la proporzionalità della fossa come effetto della forza, ma non già, replico, dello spazio unicamente, il quale non conserva tale proporzionalità che nel predetto caso particolare.

In questo inganno appunto cadde l' A. de' *Nuovi Sperimenti*. In tutta la sua opera, in tutti i suoi ragionamenti e conseguenze che deduce, assume sempre le profondità delle fosse prodotte da' suoi cilindri come esprimenti le ragioni degli effetti; ed avendo trovato che le profondità non seguivano nel massimo numero la ragione delle masse nel quadrato della velocità, trasse quella conseguenza, che essendo giusta, rovescierebbe la meccanica dai suoi fondamenti.

Intorno alla variabilità di resistenza che la materia comunque cedevole oppone a' corpi cadenti, sarebbe inutile volerne parlar a lungo, tanto più che i medesimi suoi sperimenti il dimostrano, ed egli stesso lo confessa in tutto il corso della sua Opera. Tra gli altri luoghi al c. 8. §. 59, dice che „ le re-
„ sistenze vanno sempre più alcun poco crescendo a
„ proporzione che il corpo caduto discende abbasso,

„ a motivo che quanto più il corpo penetra avanti, „ tanto più di peso deve vincere ed in certo modo „ superare." Lasciando da parte la considerazione se questa sia la sola resistenza da computarsi, e non altresì quella della tenacità (fuorchè negli sperimenti fatti nel miglio), la resistenza che nasce dalla inerzia della materia, e quella pure che dagli attriti proviene; egli sembra che la sola resistenza crescente avvertita dall' A. de' *N. Sp.* avrebbe dovuto fargli sospendere le sue conclusioni. Infatti poniamo che la resistenza *cresca a proporzione che il corpo discende abbasso*, e *che quanto più esso penetra avanti tanto più di peso debba vincere*. Cresce dunque a proporzione degli spazj percorsi, e quanto più di spazio il corpo percorre tanto più di resistenza dee vincere: è dunque questa agli spazj proporzionale. Sostituendosi pertanto nella formula $rds = -mudu$, in luogo di r indeterminato, ciò che ne determina la legge ch'è lo spazio, che noi chiameremo S; si avrà $Sds = -mudu$: ed integrando coi soliti metodi sarà, terminata che sia la fossa, e chiamando S la intiera profondità di essa, ed U la velocità che avea il corpo al momento d'immergersi nella materia cedevole, sarà dico

$S^2 = MU^2$, ed $S = \sqrt{MU^2}$: e nel caso in cui le masse de' due corpi, tra i quali si fa il confronto, siano le medesime e diverse solo le velocità, chiamandosi U la velocità di uno, C quella dell'altro, siccome S la profondità della fossa del primo, S' la profondità della fossa del secondo, si avrà $S = U$, ed $S' = C$. Gli spazj adunque percorsi sono come le semplici velocità. Ma l'effetto di questa forza, il quale è espresso da $S.rds$, ossia in questo caso da $S.sds$ è egli come la semplice velocità? Mainò, ma sibbene come la massa nel quadrato della velocità. Innumerevoli pertanto sono e devono essere le varianti ragioni della profondità delle fosse considerate com' effetto prodotto dalla forza del corpo cadente, il quale essendo sempre espresso da $S.rds$, qualunque sia la resistenza, ha la sua costante proporzionalità rappresentata da mu^2. Apparisce quindi essere verissimo ch' essendo le masse de' corpi cadenti in ragion reciproca dei quadrati delle velocità loro respettive, le fosse devono essere sempre uguali, ancorchè i corpi cadano in materie di resistenza diversa, se per fosse s'intendano, come fisicamente parlando intender deesi, gli effetti rappresentati da $S.rds$, e che sono quelli nel produrre i quali s' è esaurita la forza. Imperciocchè chiaminsi le masse dei due corpi cilindrici e di figura uguale m, M, e sieno u, U le velocità colle quali cominciano a scavar le intiere fosse f, F, siccome r ed R la resistenza della materia su cui cadono; le profondità poi delle fosse scavate fino alla estinzione del moto de' due corpi pongansi s ed S. Prendasi nella profondità delle fosse medesime una porzione di essa, e chiamisi questa s', S', siccome c, C la velocità ai corpi residua arrivati che sono in s', S'. Per le note formule si avrà (qualunque siasi la legge di resistenza) $rds' = -mcdc$, ed $RdS' = -MCdC$; ed integrando $S.rds = -\frac{mc^2}{2} + \text{Cte.}$, e $S.RdS' = -\frac{MC^2}{2} + \text{Cte.}$ Ora la costante deve esser tale che fatto $c = u$, e $C = U$, sia $s' = o$, ed $S' = o$. Dunque $S.rds' = \frac{-mc^2 + mu^2}{2}$; e $S.RdS' = \frac{-MC^2 + MU^2}{2}$. Ma terminate le fosse c e $C = o$, e $S.rds' =$ all'intiera fossa f, e $S.RdS' =$ all'intiera fossa F. Quindi in luogo di $S.rds'$ sostituendosi f, ed in luogo di $S.RdS'$ sostituendosi F, si avrà (sempre intendasi per f ed F non le sole profondità della fossa, ma le resistenze vinte per quella profondità) si avrà dico $f = \frac{mu^2}{2}$, ed $F = \frac{MU^2}{2}$. Ma per ipotesi si aveva $m : M = U^2 : u^2$. Dunque $mu^2 = MU^2$, e quindi $f = F$. Che se per fosse intender vogliansi le sole profondità, allora tutto si cangia, ed i corpi predetti cadendo su materie di resistenza diversa, sebbene, come abbiamo veduto, producano fosse uguali rappresentate da $S.rds$, non però esse avranno anco uguali profondità, le quali allora solo avran pure tra loro la ragione di uguaglianza, quando essendo le masse dei corpi cadenti in ragion reciproca dei quadrati delle loro velocità respettive, la materia su cui cadono ambedue i corpi presenti le medesime resistenze. Infatti riassumendo le due predette equazioni $S.rds' = \frac{mu^2}{2}$; e $S.RdS' = \frac{MU^2}{2}$: nel caso in cui le resistenze sieno le medesime in ambedue i casi, chiamando p questa qualunque forza di resistenza, si avrà $S.pds' = \frac{mu^2}{2}$; e $S.pdS' = \frac{MU^2}{2}$; ma $mu^2 = MU^2$. Dunque $S.pds' = S.pdS'$; ossia $S.ds' = S.dS'$: e quindi $s = S$. Ma risponderà forse l'A. de' *N. Sp.* La materia su cui ho fatto cadere i due corpi era in ambedue i casi la stessa, e presentava per conseguenza la medesima legge di resistenza: eppure non furono eguali le profondità delle fosse.

Sì, la materia era la stessa, ma le resistenze che presentava, non eran le medesime. Ne abbiamo la dimostrazione dal non aver prodotti i corpi cadenti uguali profondità nelle fosse, siccome sarebbe accaduto secondo le dimostrate leggi della meccanica, se la materia, su cui caddero i corpi, avesse presentato in ambedue i casi le medesime resistenze. Che ciò sia accaduto è egli da sorprendersi? Sarà egli difficile da intendere come dopo di avere lasciato cader un corpo in quella qualunque materia cedevole, nel riordinarla per lasciarvi cadere il secondo corpo siasi in essa cangiata ne' suoi diversi strati la quantità di resistenza? Sarebbe però inutile alla presente discussione voler indagare le cause tutte, le quali possono aver diversificata nelle accennate discese de' due corpi la quantità di resistenza della materia cedente; e basta solo per l' oggetto delle nostre ricerche sapere che qualunque volta due corpi, le di cui masse essendo in ragione reciproca dei quadrati delle velocità loro respettive, cadendo su una materia cedevole, le profondità delle fosse, che vi fanno, non sono uguali, egli è dimostrato per le già mentovate formule della meccanica, che la materia ai due diversi corpi presentò diverse resistenze da vincere. Questo e non altro è il corollario che il Sig. Ab. Z. trar poteva dai suoi sperimenti. Malgrado però questa inuguaglianza di profondità delle fosse, non resterà in alcun modo, come s'è dimostrato, offesa la ragion costante delle masse nel quadrato della velocità, che passar dee tra fossa e fossa considerate come effetto della forza, cioè come resistenze vinte per uno spazio, e non semplicemente come spazio percorso.

Egli è perciò che nessun Fisico-Matematico potrà soscrivere alla sentenza dell' A. de' *N. Sp.*, il quale chiama sospetta l' esperienza dello *s'* Gravesand (p. 120) „ e di una autorità non corrispondente al no„ me grande ed alla profonda dottrina dell' autore, „ perchè per avverarsi una simile sperienza (ch' è contraria a quella dell' Ab. Zuliani avendo trovato lo *s'* Gravesand le profondità delle fosse proporzionali alle altezze, dalle quali il corpo cadeva)

„ si rende necessaria una determinata spezie di ma„ teria molle." Sì, così è: ed ogni Matematico, siccome abbiamo dimostrato, non dubiterà asserire che per avere le profondità delle fosse proporzionali alle altezze, dalle quali cadono i corpi, richiedesi una tal determinata legge di resistenza nella materia su cui cadono, ed è quanto dire una determinata spezie di materia molle; siccome ogni Matematico affermerà altresì che in ogni qualunque materia molle le intere fosse, quell'effetto cioè che viene rappresentato da $\int . rds$ sarà sempre proporzionale alle altezze, dalle quali discesero i corpi cadenti. Potrà bensì recar meraviglia come pensando l'A. de' *N. Sp.* che le profondità delle fosse dovessero seguire la ragione delle masse nelle semplici velocità, non sia rinvenuto da questo equivoco osservando ne' suoi medesimi sperimenti, che se è falso secondo lui che le fosse generalmente sieno come le masse ne' quadrati delle velocità, perchè la esperienza Poleni non potè egli verificare che nella sola materia tenace, dovea conchiudere falsa altresì l' altra misura della massa nella semplice velocità, perchè ne' suoi medesimi sperimenti sempre non si verifica ciò che la sua sentenza esigerebbe, la uguaglianza cioè della profondità delle fosse essendo le masse in ragion reciproca delle velocità semplici. Questa uguaglianza nelle sue sperienze non succede con qualche approssimazione che nel solo miglio. In tutti gli altri sperimenti le fosse s'avvicinano più nel loro massimo numero ad essere uguali, qualora le masse sono in ragion reciproca dei quadrati, di quello che delle velocità semplici. Tante però sono le varietà ed irregolarità di resistenze, che le medesime materie in diversi sperimenti possono presentare, come servono se non ad altro a provarlo i variabilissimi risultati ottenuti dall' A. de' *N. Sp.*, che qualunque sia la ragione, che sperimentando s'ottiene, della profondità delle fosse fatte in qualsivoglia materia, avrebbesi torto di conchiudere generalmente essere quella la universal ragione della profondità di esse, e molto più torto ancora avrebbesi di conchiudere essere quella la ragione degli effetti de' corpi cadenti, ossia delle fosse considerate come resistenze vinte per uno spazio.

Apparisce quindi il motivo per cui fin da principio dicemmo troppo celebre lo sperimento Poleni. Imperciocchè sia che le profondità delle fosse, essendo le masse in ragion reciproca delle altezze, succedessero uguali o no, le fosse però rappresentate da *S . rds* sarebbero state sempre uguali. L'essersi poi trovate uguali anco le profondità, indica soltanto che le medesime resistenze presentò la materia ad ambedue i corpi, che aveano masse in ragion reciproca dei quadrati delle loro velocità; siccome al contrario negli sperimenti del Sig. Ab. Zuliani la materia da lui adoperata presentò nelle due diverse discese differenti resistenze per modo, che sebbene le fosse rappresentate da *S . rds* fossero, com'è dimostrato, sempre uguali, non lo erano però le loro profondità. Avviene pertanto che per presagire la ragione della profondità delle fosse, conviene innanzi conoscere la legge delle resistenze della materia, su cui si sperimenta. Conosciuta questa, il Matematico sia Cartesiano, sia Leibniziano saranno perfettamente d'accordo nell'assegnarne la ragione; come altresì Cartesiano o Leibniziano che sia non discorderà nel definire proporzionali alle masse nel quadrato della velocità le fosse, che da *S . rds* vengono sempre rappresentate.

Di quì nasce la ragione per cui i maggiori Matematici e dotti Fisici di ambi i partiti concordemente ammisero la sperienza Poleni: 1.° perchè sapevano non esservi alcuna contraddizione per ammettere che la materia, su cui sperimentò il Poleni, fosse tale che le medesime resistenze avesse presentato nelle due discese ai corpi, che aveano masse in ragion reciproca delle altezze, e che quindi le profondità delle fosse accadute fossero uguali: in 2.° luogo perchè ammesso questo fatto dipendente dalla innegabile formula $rds = \pm mudu$, la questione della misura delle forze vive non era per niente decisa, ricercandosi appunto se da questa formula, ovvero se dall' altra $rdt = \pm mdu$ la original misura delle forze vive convenga dedursi.

Non dovrà dirsi pertanto coll' Ab. Zuliani essersi in quella sperienza ingannato il Poleni (p. 9.) e insieme con lui tutti i dotti Fisici di Europa. L' inganno è solo di chi intese con essa di aver decisa la questione delle forze vive; ed è poi ancora maggiore l' inganno di chi replicando questo sperimento soggetto a mille accidentali variazioni, e trovando nella profondità delle fosse una ragione diversa da quella del Poleni, inferisce falsa la sperienza Poleniana, e passando quindi dalla ragione della profondità delle fosse alla ragione delle fosse medesime rappresentate da $S . rds$, pensa di aver dimostrato non seguir queste la ragione delle masse nei quadrati delle velocità.

Sarebbe lunga cosa e tediosa andar riandando tutte le proposizioni dell' Opera *Nuovi Sperimenti*, le quali mal s' accordano colle dimostrate verità matematiche comprese nelle due note formule. Ognuno però che voglia, potrà riscontrarle da se, qualora leggendo la predetta Opera abbia presenti due cose: 1.° che l' Autore di essa avendo costantemente presi gli spazj, ossia trattandosi di corpi cilindrici di uugual figura, le profondità delle fosse come esprimenti le forze che le produssero, invece di prendere il prodotto delle resistenze vinte per quegli spazj, senza conoscere la legge di quelle resistenze ragiona sulla profondità delle fosse, che sono uno soltanto dei fattori del prodotto $S.rds$ che le fosse rappresenta, come ragionar dovrebbesi sul prodotto istesso. Ragionamento simile a quello di chi avendo due prodotti composti di fattori uno noto l'altro incognito p. e. xa, yb dicesse $xa:yb = a:b$. Secondo che in tutto il contesto del suo ragionamento pare suppor egli che i corpi cadenti facciano talvolta fosse proporzionali alle loro forze, e talvolta no. Imperciocchè qualora trova le profondità delle fosse proporzionali alle semplici velocità, reputa aver allora la forza prodotto il suo intero effetto, qualora poi riscontra corpi dotati p. e. di velocità uguali, ma di masse diverse non far profondità di fosse proporzionali ai loro pesi, allora dice con una espressione certamente nè fisica, nè matematica aver il corpo fatto un effetto *minor del dovuto*. Ricorre quindi in questo caso alle resistenze, non avvertendo che quella qualunque legge di resistenza devesi calcolare in tutti i casi, ed in quelli ancora ne' quali ne prescinde, perchè coerenti in apparenza colla misura delle forze vive da lui adottata. Queste maniere di esprimersi e di considerare i suoi sperimenti, le quali lo condussero a favorire la sentenza Cartesiana, si riscontreranno dalle cose dette essere false, e contrarie ai fondamentali principj della Meccanica.

Non sarà pertanto difficile riconoscere la fallacia altresi della proposizione sua (p. 87) laddove intendendo di confutare il Boscovich dice „ ch' è sempre „ vero che il corpo scava la fossa di quella gran-

„ dezza che può scavarla con tutta la sua forza ca„ dendo in quella data materia. " Sì certo: ma non è già per questo vero, che semplicemente la profondità della fossa abbia ad essere proporzionale alla forza adoperata a scavarla, bensì però il prodotto delle resistenze vinte per quella profondità deve essere proporzionale.

Tutto ciò ch' egli dice nelle seg. p. 88, 89, 90 avrebbe, ci sembra, dovuto renderlo avvertito, che dai risultati delle sue sperienze, mancandogli la legge delle resistenze della materia su cui sperimentò, non potea mediante le sole profondità delle fosse trar alcuna proporzione per la misura delle forze vive.

Cadono pertanto tutte le spiegazioni ch' egli si studia di dare alle tante varietà od apparenti irregolarità delle sue sperienze, le quali non s' accordano come profondità di fosse nè colla sua favorita sentenza, nè colla Leibniziana: irregolarità apparenti, le quali se delle materie da lui usate nello sperimentare si conoscessero in tutti i casi le leggi di resistenza, troverebbersi tutte coerenti alla formula $rds = \pm mudu$, alla verità dalla quale non è lecito immaginarsi che co'suoi sperimenti il Signor Ab. Zuliani abbia voluto attentare.

Senza avvedersi egli cadde nell' errore medesimo che da lui fu rinfacciato al de Martino. Avendo questi fatto cadere da uguali altezze globi di peso diverso, ed avendo creduto di trovare che le grandezze delle fosse seguivano la ragione delle radici dei pesi, dedusse generalmente che i corpi cadendo in sostanze cedenti vi scavano fosse proporzionali alle radici dei pesi. E perchè (posto vero il fatto dell' esperimento del de Martino) dee dirsi però che s' è ingannato nella sua conclusione? Perchè non avvertì (dice l' A. de' *N. Sp.*) alla crescente resistenza della materia ne' suoi strati inferiori, ne' quali il globo più pesante dovea penetrare: o diciam pure per parlare colla esattezza delle espressioni analitiche, perchè chiamato M il corpo più pesante, m il più leggierò (essendo già uguali e simili di figura), e chiamata S ed s la profondità delle fosse, non insegna la Meccanica che debbasi aver generalmente poste uguali le velocità $M:m=S:s$, ma sibbene $M:m=S.RdS:S.rds$; e quindi nel caso poi particolare, in cui sia costante la resistenza, si ha $M:m=S:s$. Ma quest' errore di cui il N. A. accusa a ragione il de Martino, non è forse quello stesso in cui egli è caduto? Imperciocchè o vuole il N. A che la resistenza della materia ne' casi da lui favoriti ne' suoi sperimenti fosse costante, o no. Nel primo caso supponendo costante la resistenza e trovandosi le fosse proporzionali alle masse nelle semplici velocità, introduce senza accorgersi (come abbiam dimostrato) nella Meccanica la nuova assurda formula $rds = \pm mdu$. Che se poi neppur egli, com' è di ragione, reputa la resistenza della materia costante, ma sibbene variabile, allora egli si trova nello stesso caso del de Martino, e la risposta che diede a' di lui sperimenti, pare strano non averla data ai proprj.

Intorno al citato sperimento del de Martino non posso ommettere di notare, che oltre all' ennunziato errore di non aver computate le resistenze nel calcolare la ragione delle fosse, posto che le loro grandezze non fossero state proporzionali ai pesi, in un altro inganno è poi veramente caduto, ed è di aver preso per misura della grandezza delle fosse la sola profondità di esse formata da globi cadenti. Quest' errore gli fu notato prima dal Boscovich, e poi dal Riccati. Nè questi due grandi uomiui gratuitamente, come sembra credere il Sig. Ab. Zuliani p. 121, accusarono di ciò il de Martino, ma sibbene dandone la dimostrazione dedotta dal metodo medesimo, con cui il de Martino espose di averne misurata la grandezza. Questo metodo stesso viene pure esposto dal della Torre citato dall' A. de' *N. Sp.*; l' esposizione del qual metodo convien credere che non sia caduta sott' occhio al Sig. Ab. Zuliani, poichè è certo che allora, quantunque gli avesse sembrato che il della Torre „ ebbe intenzione di parlare della totale gran„ dezza delle fosse," avrebbe pur veduto chiaro che il metodo da lui adoperato non era quello di misurarne la totale grandezza., ma sibbene soltanto la profondità.

Tra gli altri sperimenti, de' quali si serve il Sig. Ab. Zuliani in dimostrazione della sua favorita sentenza Cartesiana, merita distinto luogo l' esperimento che ottiensi con una elegante macchina inventata dal dotto ed ornatissimo mio amico Sig. Ab. Francesconi „ il quale (dice il Sig. Ab. Zuliani p. 128) ha „ inventato un modo di mostrare colla sperienza evi„ dentemente, che quando cresce nella percussione de' „ corpi elastici la quantità di moto, cresce anco la „ forza, e vi cresce insieme colla quantità del moto „ in que' corpi medesimi, ne' quali dovrebbe per „ contrario calare, se fosse vera la sentenza Leibni„ ziana delle forze. "

Io sono assai lontano dal garantire che le asserzioni contenute in queste poche righe sieno le opinioni del Sig. Ab. Francesconi. Non avendo egli ancora pubblicata questa sua macchina, non l' oggetto per cui la fece costruire, non la serie degli sperimenti ai quali servì, e non le conseguenze che giudicò poterne dedurre, mi credo quindi in obbligo di non attribuire al Sig. Ab. Francesconi i pensamenti, che sul di lui sperimento pubblicò il Sig. Ab.

Zuliani. Ecco pertanto la descrizione che della proposta macchina fa l'autore de' *Nuovi Sperimenti*.

„ Havvi una macchina che contiene dieci palle
„ elastiche d' Avorio sospese a tanti fili in serie
„ contigua l' una all' altra, sicchè i centri di tutte si
„ trovano in una medesima linea orizzontale. Han-
„ no una grandezza crescente per ordine in ragion
„ dupla geometrica, onde l'ultima più grossa di tut-
„ te esse palle viene ad essere 1024 volte più gran-
„ de della prima " (dovea dire 512) " ch' è la mi-
„ nima. Vi è aggiunta in questa macchina una mo-
„ bilissima bilancia disposta e situata in modo, che
„ urtandosi un certo piccolo ostacolo si solleva il
„ peso sostenuto dalla bilancia. Quando tutte le pal-
„ le si trovano situate come ho indicato, l' ultima
„ grossa viene ad essere contigua al detto ostacolo
„ che comunica colla bilancia."

„ Figuriamoci ora ritirate tutte le palle da parte,
„ e sia trasportata di luogo, e sospesa presso l' osta-
„ colo soltanto la palla minima. Ciò fatto si alza
„ questa per arco ad una determinata distanza dall'
„ ostacolo, e poi si lascia discendere sicchè vada
„ ad urtare l' ostacolo medesimo, e si nota il peso
„ che col suo urto solleva nella bilancia. Rilevato
„ questo, e trasportata nel suo primo luogo la stessa
„ palla minima, supponiamo di nuovo rimesse tutte
„ le dieci palle già pendule nel sito di prima in se-
„ rie, e che l'ultima più grossa di tutte si trovi già
„ contigua all' ostacolo comunicante colla bilancia.
„ Se si levi nuovamente per arco la prima di esse
„ palle ch' è la minima surriferita, a tanta distanza
„ dalla seconda a quanta fu sollevata e discostata avanti
„ dall'ostacolo, e poi si lasci cadere in modo che vada
„ a percuotere direttamente la stessa seconda palla,
„ dalla quale si va successivamente comunicando l'

„ urto a tutte le altre fino all' ultima; in questo ca„ so si osserva aumentata per modo tale la forza „ nell' ultima palla grossa, ch' essa urtando nel più „ volte nominato ostacolo solleva nella bilancia un „ peso ch' è doppio, triplo, e più grande ancora di „ quello che avesse potuto sollevare la palletta mi„ nima quando si fece ch' essa urtasse immediata„ mente colla sua caduta nell' ostacolo. E' dunque „ provato col mezzo di questa ingegnosa ed elegante „ macchina, che come cresce in vigore della elastici„ cità la quantità del moto, benchè vada calando la „ velocità col propagarsi l'urto per una serie di pal„ le crescenti in ragione geometrica; così anche si „ aumenta la forza per muovere e vincere gli osta„ coli, contro ciò che richiederebbesi se le forze fos„ sero come le masse dei corpi moltiplicate ne' qua„ drati delle loro velocità, ma affatto conforme a „ ciò che esige la misura Cartesiana delle forze mo„ trici, che risulta vera e provata dai nostri speri„ menti, e che riceve una luminosa prova e confer„ ma da questa medesima sperienza instituita ne' cor„ pi elastici. " Fin qui il Sig. Ab. Zuliani.

Innanzi a tutto osserveremo, che proposta questa sperienza come problema da risolversi sia ai Cartesiani sia ai Leibniziani, siccome la soluzione di essa dipende dalle leggi della comunicazione del moto, e dalle formule ad esse relative, e ad ambi i partiti comuni, così data la legge della elasticità de' corpi adoperati nell' esperimento, e data la quantità di massa dell' ostacolo, la soluzione del problema deve essere per tutti la stessa ed analoga all' esperimento. Serve ciò di nuova conferma della proposizione dell' Alembert dissopra dimostrata, essere cioè per tal modo indifferente alla Meccanica la questione della misura delle forze vive, che qualunque problema diasi a risolvere ai partigiani delle due opposte sentenze, sempre la medesima sarà la soluzione.

In secondo luogo noteremo, che questo apparente assurdo potea l' A. de' *Nuovi Sperimenti* dedurlo immediatamente dal teorema Ugeniano, dal quale si sa che posti tre o più corpi elastici di massa crescente o decrescente continuamente, ed a molla perfetta, la velocità mediata impressa all' ultimo è maggiore della immediata. Ciò, e nulla più, succede nell' esperimento proposto, giacchè il sollevarsi, o no della bilancia (ch' è la espressione usata dal Sig. Ab. Zuliani) egli è comunicar, o no tanta velocità alla data bilancia, quanta basta per farle percorrere quel dato spazio; e quindi nella citata sperienza la palla minima urtando immediatamente nella bilancia caricata di un dato peso, tanta velocità non le comunica quanta urtandola per mezzo delle altre palle interposte. L' unica differenza consiste nel grado della molla de' corpi per mezzo de' quali si comunica la velocità all' ultima, non essendo perfetta nè nell' avorio, nè in qualunque altra materia la elasticità. Posta però la ragione della serie crescente o decrescente de' corpi, pei quali si comunica la velocità all' ultimo, e posta la massa di questo, mediante la formula della comunicazione del moto è cosa assai facile trovar il grado di molla, di cui devono essere forniti i corpi proposti, onde riesca il fenomeno della velocità mediata maggiore della immediata. Che se data sia la ragione della serie crescente de' globi, e dato pur sia il loro grado di molla, non è già che l' urto mediato comunichi maggior velocità dell' immediato ad un ostacolo, che presenti una resistenza qualunque uguale a quella di una qualunque quantità di massa. Imperciocchè chiamata a la massa della prima palla, q la ragione geometrica della serie continuamente crescente delle palle, n il numero di esse palle, $\frac{p}{1}$ il rapporto della elasticità alla percossa, il calcolo c'insegna che la resistenza dell' ostacolo, onde l' urto mediato sia maggiore dell' immediato, deve essere maggiore di quella che opporrebbe una quantità di massa

$$= \frac{aq^{n-1}\left((1+q)^{n-1} - (1+p)^{n-1}\right)}{q^{n-1} \quad (1+p)^{n-1} - (1+q)^{n-1}}$$

Che se la resistenza dell' ostacolo fosse uguale all' esposto valore, sarebbero pur uguali le velocità acquistate dall' ostacolo nell' urto mediato ed immediato, siccome sarebbe minor quella dell' urto mediato, se l' ostacolo presentasse minor resistenza dell' esposto valore. Quindi essendo come nel proposto sperimento 10 le palle continuamente crescenti in ragion dupla geometrica (posto ch' esse fossero perfettamente elastiche) non è vero che la prima palla urtando immediatamente in un ostacolo, che oppona una resistenza qualunque, comunichi minor velocità di quella che comunicherebbe urtandolo per mezzo delle altre 10 palle interposte, ma sibben conviene che l' ostacolo sia tale da opporre una resistenza maggiore di quella che opporrebbe una massa $= 40 + \frac{117112}{242461}$ volte maggiore della massa della palla prima minima urtante. Avrebbe perciò in grazia della esattezza meritato un qualche schiarimento il passo citato del Sig. Ab. Zuliani a quelle parole: „ E' dunque provato, ec. . . . così anche si aumenta la forza per „ muovere e vincere gli ostacoli. " Quali ostacoli? Vedremo in appresso che se l' A. de' *Nuovi Sperimenti* si fosse data la briga di occuparsi di questa ricerca non avrebbe forse proposta tale sperienza come dimostrativa del suo assunto.

Ho detto che l' unica differenza tra l' esperimento proposto dal Sig. Ab. Zuliani, ed il teorema Ugeniano consiste nel grado di molla dei corpi per mezzo de' quali si comunica la velocità all' ostacolo, non importando che la elasticità di questo sia qualunque esser si voglia. La ragione è chiara: imperciocchè divenendo il suo grado di molla uno dei fattori esprimenti la velocità da esso acquistata tanto nell' urto mediato quanto nell' immediato; la ragione che passerà di maggioranza o minoranza tra questo e quell' urto, qualunque ne sia il comune fattore, sarà sempre la stessa. Sia $\frac{p}{1}$ il rapporto della elasticità alla percossa nell' ostacolo, sia M la quantità di moto del globo urtante nell' urto immediato, ed N la somma delle masse dell' urtante, e dell' urtato: sia parimenti R la quantità di moto dell' ultimo globo urtante nell' urto mediato, e sia in questo secondo caso S la somma delle masse dell' urtante e dell' urtato. Siccome l' ostacolo è il medesimo, ed ha lo stesso grado di molla, la sua velocità nel 1.° caso sarà espressa da $(1+p)\frac{M}{N}$; e nel secondo da

$(1+p)\frac{R}{S}$. Ora egli è evidente che se

$(1+p)\frac{R}{S} < (1+p)\frac{M}{N}$, sarà nella stessa ragione maggiore $\frac{R}{S}$ di $\frac{M}{N}$ qualunque sia $(1+p)$ loro comun fattore.

Essendo adunque il fenomeno quel medesimo che fu fin dall'Ugenio dimostrato, prescindendo dai differenti gradi di velocità che vengono comunicati all' ostacolo secondo i differenti gradi di elasticità dei corpi urtanti, noi considereremo in seguito le palle della macchina come se fossero perfettamente elastiche; ed inoltre in luogo di dieci palle preposte all' ostacolo per brevità ne supporremo due sole, essendo evidente che il numero maggiore di palle non può aver altro oggetto che quello di rendere nella esperienza più sensibile il fenomeno; cosa della quale il calcolo non abbisogna punro.

Terzo. Pretende il Sig. Ab. Zuliani che con questa macchina (p. 129) si sia inventato un modo di mostrare; „ che come cresce in vigore della elasticità" (son sue parole) „ la quantità del moto, benchè vada „ calando la velocità col propagarsi l' urto per una „ serie di palle crescenti di massa in ragione geome„ trica; così anche si aumenta la forza per muove„ re e vincere gli ostacoli . . . . . conforme affatto „ a ciò che esige la misura Cartesiana delle forze „ motrici. " Questa asserzione dell' A. de' *Nuovi Sperimenti* è affatto gratuita, nè si concilia punto colle note leggi e formule della comunicazione del moto. L'effetto, da cui egli misura questa forza, è, come abbiam veduto, la velocità che il corpo urtante imprime alla bilancia caricata di pesi. Ora il calcolo insegna che in vigore della elasticità può crescere ne' corpi la quantità di moto, e ciò null'ostante il corpo, che ha maggior quantità di moto, può non imprimere maggior velocità di quello che abbia quantità di moto minore. Il fenomeno proposto dall' A. de' *Nuovi Sperimenti* non succede se non nel caso che poste p. e. due palle elastiche crescenti, o decrescenti di massa dinanzi ad un ostacolo, questo sia di tutte due maggiore se crescenti, minore se decrescenti: e nel caso poi di un numero qualunque di palle in serie crescente abbiamo di sopra veduto, che l'ostacolo (posti quei medesimi generali valori) deve essere maggiore di $\dfrac{aq^{n-1}\left((1+q)^{n-1}-(1+p)^{n-1}\right)}{q^{n-1}(1+p)^{n-1}-(1+q)^{n-1}}$. Quindi se un ostacolo C di massa $= 3$ venga prima immediatamente urtato dalla palla perfettamente elastica A di massa $= 1$; poi rimesso in quiete venga colpito dall' altra palla pur perfettamente elastica B di massa $= 4$, alla quale sia stato comunicato il moto dalla palla A, non è vero che la velocità acquistata da C nell' urto mediato sia maggiore che nell' immediato: poichè posta $= 1$ la velocità di A, l' ostacolo C nel primo caso acquisterà una velocità $= \frac{1}{2}$, e nel secondo $= \frac{8}{35} < \frac{1}{2}$. Eppure la quantità di moto di $B = \frac{8}{5}$, e quella di $A = 1 < \frac{8}{5}$. Sebbene adunque B abbia maggior quantità di moto di A, pure trasfuse in C velocità minore che A. Si osservi inoltre che computandosi la forza viva alla Leibniziana, si ha la forza di

$A = 1$, e quella di $B = \frac{16}{25}$. Se dunque assumer si dovesse la velocità impressa ai corpi dall'urto, come l'effetto da cui misurare la forza dell'urtante, in questo caso la maggioranza dell'effetto avrebbe seguita piuttosto la ragione Leibniziana; ed i Cartesiani avrebbero nella loro sentenza da risolvere l'assurdo medesimo, che il Sig. Ab. Zuliani propose ai Leibniziani, di un effetto maggiore prodotto da una forza minore. Che se i due corpi elastici sieno il 1.° A di massa 1, e velocità 1, il secondo B di massa 50 e velocità $\frac{53}{200}$, il 3.° C di massa 3 fermo, ed urti A in C; la velocità di C sarà $= \frac{1}{2}$, ed uguale pure a $\frac{1}{2}$ la velocità di C quando venga urtato da B. In ambedue i casi adunque si muoverà C con la medesima velocità, sebbene la quantità di moto dell'urtante $A = 1$, quella di $B = \frac{53}{4}$; e la forza Leibniziana di $A = 1$, quella di $B = \frac{2809}{800}$; ch'è quanto dire, sebbene tanto nella sentenza Cartesiana, quanto nella Leibniziana B abbia maggior forza di A. Se pertanto dal grado di velocità comunicata dedur si dovesse la misura delle forze, potrebbe a buon diritto argomentare taluno non potersi abbracciare alcuna delle due note sentenze come misura della forza de' corpi in moto; perchè la velocità, che per mezzo di questi ad altri corpi si comunica, non segue nè l'una nè l'altra misura, producendosi uguale velocità da due corpi animati da forze disuguali tanto secondo la sentenza Cartesiana, quanto secondo la Leibniziana. Ciò sia detto per dimostrare quello che dalla sola ispezione delle formule della comunicazione del moto apparisce, non seguire cioè la velocità, che imprimono i corpi in moto coll' urto, nessuna delle due controverse misure della forza. Quindi si comprende facilmente la ragione per cui, sebbene il fenomeno esposto del teorema Ugeniano fosse a tutti noto, non per questo però i Cartesiani ne fecero uso per opporlo alla sentenza Leibniziana.

Giova altresì notare essere affatto in contraddizione colle note esposte formule l'asserzione del Sig. Ab. Zuliani p. 129 „ che come cresce in vigore „ della elasticità la quantità di moto . . . . così an„ che si aumenta la forza per muovere e vincere „ gli ostacoli. " Per dedurre con fondamento la misura della forza di un corpo urtante dalla velocità che esso comunica ad un altro corpo, converrebbe certamente che assumendosi per misura la quantità di moto *come cresce* questa nell'urtante, *così* crescesse nell'urtato la velocità, ch'è quanto dire nella *stessa ragione*. Ma e chi non sa che ciò in nessun modo succede? Sieno A, B due palle perfettamente elastiche crescenti di massa in una ragione qualunque, e sia C un ostacolo di massa qualunque: la velocità di A sia $= u$. Nell' urto immediato di A in C, la velocità di questo, posto $\frac{p}{1}$ il grado di molla dell'ostacolo C, sarà $(1+p)\frac{Au}{A+C}$. Nell' urto mediato poi sasà prtma la velocità di $B = \frac{2Au}{A+B}$, e quindi

la velocità di C colpito da $B = (1+p) \frac{2AuB}{(A+B) \times (B+C)}$

Perchè fosse vera la proposizione del Sig. Ab. Zuliani che *come cresce* ec., sarebbe mestieri che si avesse.

$$\frac{Au}{A+C} : \frac{2AuB}{(A+B) \times (B+C)} = Au : \frac{2AuB}{A+B}.$$

Ma questa proporzione sarà sempre falsa fintantochè, come si è posto, sarà $B > A$. Dunque non s'avrà mai in una serie crescente di palle elastiche la velocità di C colpito immediatamente da A, alla velocità di C colpito da A per mezzo di B, come la quantità di moto di A, alla quantità di moto di B.

Havvi bensì il caso, in cui la velocità di C colpito immediatamente da A, sta alla velocità di C colpito da A per mezzo di B, come la massa di A nel quadrato della sua velocità, sta alla massa di B nel quadrato della velocità da esso acquistata. Succede ciò tutte le volte che la massa dell'ostacolo C è uguale alla massa di A. Ciò si è detto non già per trar alcuna prova a favore della sentenza Leibniziana, ma per convincere solamente di assoluta insussistenza la pretesa dimostrazione tratta dall'esperimento proposto.

Risponderà forse l'A. de' *Nuovi Sperimenti*, che sebbene innegabili sieno le cose sin qui esposte, rimane però vero altresì che essendo la velocità impressa l'effetto dell'urto de' corpi in moto, nel caso almeno del suo sperimento la velocità acquistata dall'ostacolo ne' due urti mediato ed immediato non segue la ragione della misura della forza viva Leibniziana, „ e quindi è da modificarsi se non da can„ giarsi affatto la proposizione" (son sue parole pag. 129) „ universalmente enunziata dal Gravesand, „ ed abbracciata dal Muschenbroekio, e da tanti „ altri insigni fisici Meccanici, vale a dire che gli „ effetti prodotti dai corpi in moto col loro urto „ sono sempre come i quadrati delle velocità." Io son d'avviso che lo s' Gravesand, il Muschenbroekio, e tutti quegli altri insigni fisici, i quali si dichiararono per la sentenza Leibniziana, non crederebbero punto di essere astretti dal di lui sperimento a dover modificare la loro general proposizione. Vediamolo.

Egli è ben noto alla dottrina dell'A. de' *Nuovi Sperimenti*, che la sentenza Leibniziana porta, che siccome in qualsivoglia urto di corpi inerti avviene che l'un corpo e l'altro si costipi e si ammacchi, così in questa contusione s'impieghi e si perda parte di quella forza, di cui prima dell'urto erano forniti, rimanendo viva in essi corpi l'altra parte della forza primitiva che non fu consumata nella contusione. Quindi allorchè i Leibniziani dicono che gli effetti prodotti dai corpi in moto col loro urto sono sempre come i quadrati delle velocità, intendono (dicon essi) di parlare del pieno ed intero effetto, il quale eguaglia la causa piena; e perciò secondo essi la forza primitiva de' corpi in moto uguaglia sì quella che nella contusione si spende, che l'altra la quale formata la contusione rimane viva ne' corpi. Posti questi principj che sono base della sentenza Leibniziana, vediamo se l'esperimento proposto dal Sig. Ab. Z. possa dare alcun imbarazzo ai partigiani di quella opinione.

Inanzi però di rispondere colla applicazione de' principj Leibniziani alla obbiezione tratta dal teorema Ugeniano, dal quale discende quel medesimo apparente assurdo, che col suo sperimento propone il Sig. Ab. Zuliani, noi considereremo il caso in cui corpi molli privi d'ogni elasticità vanno a colpire in un ostacolo. Siano i corpi molli *A*, *B*, il primo di massa 1, il secondo di massa 2: la velocità di *A* sia a quella di $B = 1 : \frac{2}{3}$, e siavi l' ostacolo fermo *C* di massa $= 4$. Urti *A* in *C*: la velocità guadagnata da questo sarà $\frac{1}{5}$. Rimesso in quiete *C* vada *B* ad urtare in esso: la velocità di *C* sarà $= \frac{2}{9} > \frac{1}{5}$, ch'è la velocità che gli fu impressa da *A*. La forza viva dei corpi urtanti calcolata alla Cartesiana è maggiore in $B = \frac{4}{3}$, che in $A = 1$; calcolata poi alla Leibniziana è maggiore in $A = 1$, che in $B = \frac{8}{9}$: ma la velocità (che l'A. de' *N. Sp.* considera come l'effetto dell'urto, da cui misurarsi la forza viva) comunicata da *B* fu maggior che da *A*; dunque secondo lui fu maggiore ancora la forza viva che la produsse: dunque alla Cartesiana deesi calcolare la forza, che appunto così calcolata, la forza viva di *B* apparisce maggiore che quella di *A*. Ecco pertanto il caso identico dell'esperimento proposto dal Sig. Ab. Zuliani reso semplicissimo col prescindere dalla elasticità, e reso facile a dimostrarsi senza alcuna macchina, ma colla sola applicazione delle formule.

Cosa pertanto rispondono i Leibniziani? Non è già (dicon essi) da calcolarsi la forza primitiva de' corpi in moto dalla sola forza viva che rimane in essi dopo l'urto, (V. Riccati Op. cit. p. 292) ma altresì da quella che nella contusione si spende. Quindi l'effetto, da cui deesi misurare la forza di *A* e di *B*, non è la sola velocità impressa a *C*, e che ai corpi urtanti resta comune, ma la contusione ancora che si formò in essi. Calcolata questa si troverà, dicon essi, che la massa del corpo urtante nel quadrato della sua velocità è uguale alla somma delle masse dell'urtante e dell'urtato nel quadrato della velocità comune dopo l'urto, più la forza perduta nella contusione, la quale è uguale al prodotto delle due masse dell'urtante e dell'urtato nel quadrato della velocità dell'urtante diviso per la somma delle masse de' due corpi urtante ed urtato. Questi sono i fondamentali principj della sentenza Leibniziana notissimi, mediante i quali il proposto caso non può recare ai Leibniziani imbarazzo alcuno. Infatti chiamata V la velocità della massa *A* avanti l'urto, v la velocità residua dopo l'urto, la quale diventa comune col corpo urtato; la forza viva Leibniziana di *A* sarà $= AV^2$, e per quel che si è detto $= (A + C) v^2 + \frac{ACV^2}{A+C}$. Ora posti gli anzidetti valori di $A = 1, C = 4, V^2 = 1, v^2 = \frac{1}{25}$, sostituendo si avrà $1 = \overline{1+4} \times \frac{1}{25} + \frac{1.4.1}{5} = 1$. La forza viva poi della massa B, chiamata U la sua velocità avanti l'urto, u quella che conserva comune con C dopo di averlo urtato, sarà $BU^2 = (B + C) u^2 + \frac{BCU_2}{B+C}$. E sostituendo i valori di $B = 2, C = 4$, $u^2 = \frac{4}{81}, U^2 = \frac{4}{9}$, si avrà $\frac{8}{9}, = (2+4) \frac{4}{81}, + \overline{\frac{2.4}{2+4}} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$. E' bensì vero adunque che la velocità comunicata da B a C è maggiore di quella impressagli da A, sebbene questa abbia maggiore forza di B; ma la velocità che succede dopo l'urto (dicono i Leibniziani) non è che una parte dell'effetto prodotto dalla forza viva, mentre l'effetto pieno ch'è espresso da $(A + C) v^2 + \frac{ACV^2}{A+C}$, e da $(B + C) u^2 + \frac{BCU^2}{B+C}$ segue esattamente la ragione di maggioranza della forza medesima.

Dopo di avere dimostrato essere coerente alla sentenza Leibniziana che in alcuni casi di due corpi molli in moto maggior velocità ad un altro corpo molle in quiete comunichi quello che ha minor forza viva Leibniziana, passiamo a considerare il caso de' corpi elastici, e più particolarmente quello stesso del teorema Ugeniano. I tre anzidetti corpi in luogo di essere molli siano perfettamente elastici, e sia il solo corpo A in moto colla velocità $= 1$. Urti A in C immediatamente: esso comunica a C una velocità espressa da $\frac{2}{5}$. Che se A metterà in moto C per mezzo di B, prima comunicherà a B una velocità $= \frac{2}{3}$, colla qual velocità B incontrando C, farà guadagnar a questo la velocità $= \frac{4}{9}$. Ecco pertanto il caso de' corpi elastici, in cui quel corpo che ha maggior quantità di moto, e minor forza viva Leibniziana, comunica maggior velocità che quello il quale avendo maggior forza viva Leibniziana ha minor quantità di moto. La differenza che passa tra il preaente caso e l'altro, in cui i corpi erano molli, consiste in ciò, che la velocità di C colpito da A nel primo era $= \frac{1}{5}$, in questo $= \frac{2}{5}$; e quella di C colpito da B nel primo $= \frac{2}{9}$, nel secondo $= \frac{4}{9}$. Ciò posto vediamo mediante le note formule qual velocità sia rimasta ai corpi A, B dopo l'urto. Nel primo caso, in cui tutti i corpi si sono supposti molli, la velocità del corpo urtante dopo l'urto essendo uguale a quella dell'urtato, ne viene che la velocità di A resta $= \frac{1}{5}$, e quella di $B = \frac{2}{9}$. Ma nel caso in cui i corpi sieno elastici, la velocità del corpo urtante A dopo l'urto è $= 1 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 1}{1 + 4} = - \frac{3}{5}$; e quella di $B = \frac{2}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{2 + 4 \times 3} = - \frac{2}{9}$: in ambedue i casi negativa, che è quanto dire nella plaga opposta alla prima direzione. Ora abbiamo veduto che secondo i Leibniziani la forza viva perduta da A nella contusione è $= \frac{4}{5}$, e quella perduta da $B = \frac{16}{27}$. Nella restituzione poi della molla elastica perfetta dee succedere che rinasca tutta la forza viva perduta; e la legge della distribuzione tra i due corpi di questa forza, che rivive, è tale, che la velocità la qual viene comunicata ai due corpi, sta sempre in ragione reciproca delle loro masse. Questo teorema dimostrato dal Riccati (Op. cit.) si può immediatamente dedurre, mi sembra, con maggior facilità dalle formule istesse della comunicazione del moto pei corpi elastici.

Sieno due corpi elastici A, C, il primo in moto colla velocità V, il secondo in quiete; e sia $\frac{p}{1}$ il rapporto della elasticità alla percossa. La velocità di

C urtato da A è $= (1+p)\frac{AV}{A+C}$, e la velocità di A dopo l'urto è $= V-(1+p)\frac{CV}{A+C}$. La velocità poi di questi corpi dovuta alla sola elasticità si otterrà sottraendo dalla velocità trovata nella supposizione che sieno elastici, l'altra velocità che avrebbero avuto essendo molli soltanto. Ora la velocità di C in questo caso sarebbe stata $\frac{AV}{A+C}$, uguale a quella che sarebbe pur rimasta ad A. Dunque da $(1+p)\frac{AV}{A+C}$ sottraendo $\frac{AV}{A+C}$, e da $V-(1+p)\frac{CV}{A+C}$ sottraendo pure $\frac{AV}{A+C}$, si avrà il valore della velocità di C dovuto alla elasticità, che sarà uguale a $p.\frac{AU}{A+C}$, e quello di $A = -p.\frac{CV}{A+C}$. Ma (si ommettono i segni, poichè il confronto si fa tra le velocità assolute senza riflesso alle plaghe) $p.\frac{CV}{A+C} : p.\frac{AV}{A+C} = \frac{1}{A} : \frac{1}{C}$. Dunque la velocità, che dalla restituzione della molla si comunica ad A, sta alla velocità che si comunica a C, in ragione inversa delle masse A, C.

Acquista pertanto A (posti i valori di A, B, C come sopra, e posta la elasticità perfetta) dalla molla nella direzione contraria a quella che aveva una velocità $= \frac{4}{5}$, dalla quale detraendosi la velocità ch' eragli rimasta nella prima direzione $= \frac{1}{5}$, gli restano $\frac{3}{5}$ di velocità nella parte contraria. All' opposto C nella direzione primitiva del moto di A acquista in grazia della molla una nuova velocità $= \frac{1}{5}$. Facciasi lo stesso calcolo e ragionamento sulla velocità, che acquista C urtato da B, e si troverà che la velocità di C dovuta alla restituzione della molla è $= \frac{2}{9}$, e quella di $B = \frac{4}{9}$, dalla quale detratta la velocità rimastagli nella prima direzione del moto, gli restano $\frac{2}{9}$ di velocità nella direzione contraria. Fin quì e Leibniziani e Cartesiani devono essere perfettamente d'accordo.

Ora egli è evidente che avuto riflesso alla sola compressione della molla, egli è lo stesso come se il corpo fosse molle, e quindi vale per esso (dicono i Leibniziani) quel medesimo ragionamento, che s' è fatto pei corpi molli; cioè che il corpo urtante nel formai la contusione fa una perdita di forza espressa da $\frac{ACU^2}{A+C}$, e quindi nel caso Ugeniano essendo in grazia della contusione maggiore la perdita di forza viva fatta da A di quella che perde B, non havvi assurdo alcuno che la velocità nella direzione primitiva del moto rimasta ad A sia minore di quella di B. Anzi, dicon essi, così esser dee onde l' effetto pieno del corpo urtante ed urtato nel quadrato della velocità ad essi comune dopo l'urto, più la forza viva perduta nella contusione, eguaglino la forza viva che il corpo urtante aveva inanzi l'urto. Nei corpi elastici poi, finita la compressione, l'elastro nel restituirsi ridona ai corpi quella forza viva che nel comprimer esso avevano perduta; e siccome nella compressione tra A e C vi fu maggior perdita di forza viva di quella che si perdette nella compressione tra B e C, così nella restituzione maggior è la somma della forza viva ridonata ad A e C, di quella che fu acquistata da B e C. Ma siccome poi la velocità che l' elastro comunica ai due corpi, tra' quali era compresso, è in ragione reciproca delle masse, succede che l'elastro tra C ed A, ch'è di massa minore di B, comunica a C minor velocità di quella che l'elastro tra C e B comunica allo stesso C, quantunque l'elastro tra B e C ridoni una somma di forza viva minore di quella, che ridona l'altro tra C ed A. Questo ragionamento che un Leibniziano farebbe a chi gli opponesse il fenomeno del teorema Ugeniano, vale a distruggere altresì il medesimo apparente assurdo che risulta dalla sperienza proposta dal Sig. Ab. Zuliani, alla quale ne sarebbe facile la particolare applicazione, date che fossero le leggi di elasticità de' corpi in essa adoperati. Non è quindi „ da modifi„ carsi o da cangiarsi (come pretende il Sig. Ab. Zuliani in grazia di questo sperimento) „ la pro„ posizione universalmente enunziata dallo 's' Gra„ vesand, vale a dire che gli effetti prodotti dai „ corpi in moto col loro urto sono sempre co„ me i quadrati delle velocità: “ giacchè appunto lo sono nel senso Leibniziano anche nel caso della comunicazione del moto, qualora non la sola velocità che comunicano col loro urto, ma si consideri pure la perdita di forza che ne' corpi succede mediante la compressione, la qual perdita secondo la sentenza Leibniziana, deesi mettere a calcolo, contro di che nulla prova l'esperimento proposto.

Parimenti non è da cangiarsi (nel senso dell' A. de' *N. Sp.*) „ l'altro principio (ossia conseguenza) „ della sentenza Leibniziana, che un peso cioè di 4 „ libbre (p. 129) calato da una data altezza in una „ materia cedevole vi scavi una fossa eguale a quel„ la che forma il peso di una libbra cadendo sotto „ lo stesso volume da una altezza 4 volte maggiore „ di quella da cui fu lasciato cadere l'altro peso di „ 4 libbre“. Anzicchè rigettare questa proposizione si dee, come abbiam dimostrato, sostenerla come indubitata non solo da un Leibniziano, ma da un qualunque Matematico. Imperciocchè matematicamente e non volgarmente parlando, la fossa come effetto della forza di un corpo in moto è sempre rappresentata, non dalla ampiezza della fossa, ma dalle resistenze vinte per quelle ampiezze, ossia da $\int . rds$, la quale in qualunque ipotesi di resistenza è sempre proporzionale ad $\frac{mu^2}{2}$. Nel caso poi in cui la resistenza sia costante, ed i due corpi di 1, e 4 libbre sieno cilindrici ed uguali di figura, allora non solo la fossa, ma la profondità pur anco di essa osserva quella medesima ragione. Dal non aver posto attenzione a ciò l'A. de' *N. Sp.* cadde nell' equivoco che abbiamo sopra dimostrato, e che diede occasione alla Opera di cui abbiamo finora parlato.

Non è pertanto, come presume il Sig. Ab. Z., che molti fisici seguaci della misura Cartesiana delle forze sieno stati troppo facili per essere stati ingannati da sperienze fallaci, e singolarmente da quelle del Poleni, quando condiscesero ad accordare (p. 12) che le forze si possono calcolare come i quadrati delle velocità. Non sono le sperienze del Poleni nè d' altri, sono i principj matematici che ne li indussero, conoscendo essi che se si calcolano le forze dalla formula $rds = \pm mudu$ vale la sentenza Leibniziana, come al contrario la Cartesiana se misurar si vogliano dall'altra $rdt = \pm mdu$. Cosa si dovrà poi pensare dell' esperimento del Mersenno, il quale (come pretende il Sig. Ab. Z.) „ si può dire che gli „ avesse fatto ritrovare la ricercata misura delle for- „ ze." L'esperimento è quello della bilancia „ su „ una lance della quale (così l'Ab. Z.) lasciava il „ Mersenno cadere da varie altezze una palletta di „ bronzo di un'oncia, la quale colla forza nel ca- „ dere acquistata poteva alzare la lance opposta, in „ cui vi avea un peso otto volte più grave: la pal- „ letta medesima vinceva un peso doppio del primo „ cadendo da una altezza otto volte maggiore, ed un „ peso triplo da una altezza maggiore nove volte. „ Donde apparisce che il Mersenno aveva scoperto „ che le forze de' gravi cadenti sono come le radici

„ delle altezze." E' egli possibile che l' esperimento del Mersenno gli dasse diritto di trar questa conclusione? Non è egli dalle leggi della comunicazione del moto che dipende la quantità di peso, a cui l' urto della palletta di bronzo cadendo potea comunicar tal data velocità da fare che il peso salisse a quella data costante altezza? Ora è egli vero che chiamata A la palla cadente, U la velocità nella discesa dalla prima altezza, $2U$ la velocità nella discesa dalla altezza 4 volte maggiore della prima, M la massa alzata nel primo caso, C la velocità communicatale onde salisse alla altezza proposta, è egli vero dico che s'abbia $AU : 2AU = MC : 2MC$? Se ciò fosse, sarebbero false le leggi della communicazione del moto. Vediamolo. La velocità di M che nel primo caso abbiamo chiamata C, è (prescindendo dalla elasticità, che supporremo uguale in ambedue i casi) $\frac{AU}{M+A}$. Ora qual dovrà essere la massa, alla quale A colla velocità $2U$ possa communicar la medesima trovata velocità? Chiamata x questa massa si avrà $\frac{2AU}{x+A} = \frac{AU}{M+A}$, e quindi $x = 2M + A$. Non è dunque doppio solamente il peso, a cui può communicar la medesima velocità la palla cadente dalla altezza 1, e dalla altezza 4, ma dee essere uguale alla somma del doppio peso, più la massa del corpo cadente. Non insisto di più su questo sperimento, il quale dalle cose dette anco di sopra apparisce dover riuscire inutile all'oggetto della disputa della misura delle forze vive, qualora sia ben eseguito, e ne sia ben calcolato l'effetto. Valgano le verità sin quì esposte a far cessare intieramente anco tra noi la controversia intorno alla misura delle forze vive, che dimostrata inutile alla soluzione di qualunque problema meccanico, ed impossibile da risolversi per mezzo di qualsivoglia sperimento, non dee nello studio delle importanti dottrine Fisico-matematiche occupare il posto ed il tempo destinato alle ricerche promotrici della Scienza Meccanica.

FINE.